



## MODULIO APRAŠAS

| Modulio pavadinimas          | Kodas |
|------------------------------|-------|
| Skaitiniai metodai su Python | SKAIT |

| Dėstytojas                            | Padalinys                                                         |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Koordinuojantis: dr. Rokas Astrauskas | Informatikos institutas<br>Matematikos ir informatikos fakultetas |
| Kitas (-i):                           | Vilniaus universitetas                                            |

| Studijų pakopa | Dalyko tipas |
|----------------|--------------|
| Pirmoji        | Individualus |

| Igyvendinimo forma | Vykdymo laikotarpis | Vykdymo kalbos |
|--------------------|---------------------|----------------|
| Auditorinė         | Pavasario semestras | Lietuvių       |

| Reikalavimai studijuojančiajam                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------|
| Išankstiniai reikalavimai: Matematinė analizė, algebra, programavimo pagrindai |

| Modulio apimtis kreditais | Visas studento darbo krūvis | Kontaktinio darbo valandos | Savarankiško darbo valandos |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 5                         | 130                         | 68                         | 62                          |

| Modulio tikslas: studijų programos ugdomos kompetencijos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                          |                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Modulio tikslas – ugdyti pagrindinius matematinius ir programavimo įgūdžius, studijuojant skaitinius įvairaus tipo matematinių uždavinių sprendimo metodus. Taip pat siekiama ugdyti bendravimo dalykinėse situacijose įgūdžius.                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                          |                                                           |
| <b>Bendrosios kompetencijos:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Bendravimas ir bendradarbiavimas (BK1).<ul style="list-style-type: none"><li>Gebės raštu ir žodžiu perteikti informaciją, idėjas, problemas ir sprendimus valstybine ir užsienio kalba, bendraudamas su specialistais ir ne specialistais (BK1.1).</li></ul></li></ul>                                                                                                                                                           |                                                                                                                                          |                                                           |
| <b>Dalykinės kompetencijos:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Konceptualių pagrindų žinios ir gebėjimai (DK4).<ul style="list-style-type: none"><li>Gebės taikyti matematikos pagrindų, mokslo, inžinerijos, kompiuterių mokslo teorines žinias ir algoritminius principus programų sistemų kūrime (DK4.2).</li><li>Gebės abstrakčiai mąstyti, naudoti formalius aprašymo metodus, įrodinėti jų teisingumą, formalizuoti ir specifiuoti realaus pasaulio problemas (DK4.3).</li></ul></li></ul> |                                                                                                                                          |                                                           |
| Modulio studijų siekiniai                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Studijų metodai                                                                                                                          | Vertinimo metodai                                         |
| Gebės apibrėžti svarbiausius skaitinių metodų teorijos sąvokas, iliustruoti jas pavyzdžiais.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Tradicinė paskaita<br>Savarankiškas darbas su literatūra<br>Konsultacijos                                                                | Egzaminas raštu                                           |
| Gebės formuluoti ir įrodyti svarbiausius skaitinių metodų teorijos teiginius.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                          |                                                           |
| Gebės taikyti skaitinių metodų teorijos teiginius sprendžiant standartinius uždavinius analiziškai ir/arba naudojant matematinę programinę įrangą.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Praktiniai užsiėmimai<br>Namų darbų programavimo užduotys<br>Sprendimo algoritmo parengimas, jo realizacija ir algoritmo veikimo tyrimas | Programavimo užduočių atsiskaitymai<br>Kontrolinis darbas |
| Mokės pritaikyti tinkamas Python bibliotekas matematiniams skaičiavimams, grafikų braižymui ir kt.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                          |                                                           |

|                                                                                                                               |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Gebės spręsti ir analizuoti matematinius modelius, kompiuterinių skaičiavimų pagrindų gauti išvadas ir jas logiškai pagrįsti. |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

| Temos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Kontaktinio darbo valandos |               |           |          |                            |                       |                          | Savarankiškų studijų laikas ir užduotys |                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------|-----------|----------|----------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Paskaitos                  | Konsultacijos | Seminarai | Pratybos | Laboratoriniai darbai (LD) | Konsultavimas LD metu | Visas kontaktinis darbas | Savarankiškas darbas                    | Užduotys                                                                                                                                           |
| 1. Skaičiavimų kompiuteriu paklaidos. Programinė įranga matematiniams uždaviniams                                                                                                                                                                                                                                                        | 2                          |               |           |          | 2                          |                       | 4                        | 4                                       | Praktinis darbas skirtas pasiruošti skaičiavimams kompiuteriu                                                                                      |
| 2. Netiesinių lygčių sprendimas: Pusiauškirtos metodas. Šaknų atskyrimas. Paprastųjų iteracijų metodas. Niutono metodas. Netiesinių lygčių sistemų sprendimas                                                                                                                                                                            | 4                          |               |           |          | 4                          |                       | 8                        | 8                                       | Namų darbų užduotys, savarankiškas literatūros skaitymas. Praktinis darbas skirtas netiesinių lygčių sprendimui                                    |
| 3. Tiesinių lygčių sistemų tiesioginiai sprendimo metodai: Apibrėžimai ir taikymai. Gauso metodas. Pagrindinio elemento parinkimo būdai. Gauso metodo skaičiavimų apimtis. LU dekompozicija. Choleckio metodas.                                                                                                                          | 6                          |               |           |          | 6                          |                       | 8                        | 4                                       | Namų darbų užduotys, savarankiškas literatūros skaitymas. Praktinis darbas skirtas tiesinių lygčių sistemų sprendimui. Pasirengimas koliokviumui.. |
| 4. Tiesinių lygčių sistemų iteraciniai sprendimo metodai: Jakobio ir Zeidelio metodai. Vektorių ir matricių normos, taikymas paklaidoms skaičiuoti. Variaciniai metodai: didžiausio gradiento metodas.                                                                                                                                   | 4                          |               |           |          | 4                          |                       | 8                        | 4                                       |                                                                                                                                                    |
| 5. Funkcijų ir duomenų aproksimavimas: Funkcijų interpoliavimas: Tiesinis, kvadratinis interpoliavimas. Niutono interpoliacinis daugianaris. Skirtumų santykio formulės ir skirtumų lentelės sudarymas. Išvestinių aproksimavimas. Interpoliavimas splineais: kvadratinis ir kubinis splineai. Aproksimavimas mažiausių kvadratų metodu. | 6                          |               |           |          | 6                          |                       | 12                       | 8                                       | Namų darbų užduotys, savarankiškas literatūros skaitymas. Praktinis darbas skirtas aproksimavimo uždavinių sprendimui.                             |
| 6. Skaitinis integravimas: Stačiakampių, trapecijų ir Simpsono formulės. Paklaidos įvertinimo būdai. Rungės taisyklė. Adaptyvieji skaitinio integravimo metodai.                                                                                                                                                                         | 4                          |               |           |          | 4                          |                       | 8                        | 8                                       | Namų darbų užduotys, savarankiškas literatūros skaitymas. Praktinis darbas skirtas integravimo uždavinių sprendimui                                |
| 7. Paprastosios diferencialinės lygtys: Pagrindinės sąvokos, analizinis sprendimas ir taikymai. Skaitiniai sprendimo metodai: Eulerio, prediktoriaus - korektoriaus, Rungės – Kuto metodai. Aproksimavimo paklaida, metodo stabilumas ir konvergavimas.                                                                                  | 6                          |               |           |          | 6                          |                       | 16                       | 8                                       | Namų darbų užduotys, savarankiškas literatūros skaitymas. Praktinis darbas skirtas diferencialinių lygčių                                          |

|                                  |                     |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |   |  |  |    |    |                                      |
|----------------------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|--|--|----|----|--------------------------------------|
|                                  |                     |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |   |  |  |    |    | sprendimui analiziškai ir skaitiškai |
| Egzaminas                        |                     |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    | 2 |  |  |    | 2  | 18                                   |
| Iš viso                          |                     |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 32 | 2 |  |  | 32 | 68 | 62                                   |
| <b>Vertinimo strategija</b>      | <b>Svoris proc.</b> | <b>Atsiskaitymo laikas</b> | <b>Vertinimo kriterijai</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |   |  |  |    |    |                                      |
| Praktinės užduotys (kompiuteriu) | 50                  | Semestro metu              | Laboratorinio darbo metu sprendžiami uždaviniai, Atsiskaitymas vyksta žodžiu, demonstruojant ir aiškinant sprendimą kompiuteryje, laboratorinio darbo metu kompiuterinėje klasėje.<br>Maksimalus balas skiriamas už pilnai ir teisingai išspręstą uždavinį, už nepilnai išspręstą uždavinį gaunama dalis balų. Galima surinkti papildomų balų iš neprivalomų užduočių.                                               |    |   |  |  |    |    |                                      |
| Kontrolinis                      | 10                  | Semestro viduryje          | Kontrolinį sudaro du - trys praktiniai uždaviniai. Maksimalus balas skiriamas už pilnai ir teisingai išspręstą uždavinį bei gautą skaitinį atsakymą, atsakytus klausimus. Už nepilną sprendimą skiriama atitinkamai balų dalis.                                                                                                                                                                                      |    |   |  |  |    |    |                                      |
| Egzaminas (raštu)                | 40                  | Sesijos metu               | Egzaminą sudaro teoriniai klausimai iš visų kurso temų ir du - trys praktiniai uždaviniai. Maksimalus balas skiriamas, jei studentas atsakė į pateiktą klausimą: teisingai apibrėžė klausime vartojamas sąvokas, teisingai suformulavo teiginius ir juos įrodė, pateikė pavyzdžius, išsprendė uždavinius. Už dalį atsakymo gaunama dalis balų. Iš egzamino reikia surinkti bent 1 tašką iš 4 norint išlaikyti kursą. |    |   |  |  |    |    |                                      |
| Eksterno tvarka                  |                     |                            | Reikalavimai: reikia turėti surinkus bent 50% balų semestro metu, kad būtų leidžiama laikyti eksternu. Perlaikyti bus galima tik egzaminą, ankstesniais metais surinkti balai pernėšami.                                                                                                                                                                                                                             |    |   |  |  |    |    |                                      |

| <b>Autorius</b>                                              | <b>Leidimo metai</b> | <b>Pavadinimas</b>                                      | <b>Periodinio leidinio Nr. ar leidinio tomas</b> | <b>Leidimo vieta ir leidykla ar internetinė nuoroda</b> |
|--------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Privalomoji literatūra</b>                                |                      |                                                         |                                                  |                                                         |
| R. Čiegis, V. Būda                                           | 1997                 | Skaičiuojamoji matematika                               |                                                  | Vilnius, TEV, 1997.                                     |
| R. Čiegis                                                    | 2003                 | Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai     |                                                  | Vilnius, Technika, 2003                                 |
| <b>Papildoma literatūra</b>                                  |                      |                                                         |                                                  |                                                         |
| A. Quarterony, F. Salery and P. Gervazo                      | 2010                 | Scientific Computing with MATLAB and OCTAVE             |                                                  | Springer                                                |
| A. Quarterony, R. Sacco and P. F. Salery                     | 2000                 | Numerical mathematics                                   |                                                  | Springer                                                |
| W.H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterlig, B. P. Flaneery | 2009                 | Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing |                                                  | Cambridge University Press                              |



## COURSE UNIT DESCRIPTION

| Course unit title             | Course unit code |
|-------------------------------|------------------|
| Numerical Methods with Python | SKAIT            |

| Lecturer                          | Department where the course unit is delivered                                                 |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Coordinator: dr. Rokas Astrauskas | Institute of Computer Science<br>Faculty of Mathematics and Informatics<br>Vilnius University |

| Cycle | Type of the course unit |
|-------|-------------------------|
| First | Individual              |

| Mode of delivery | Semester or period when the course unit is delivered | Languages of instruction |
|------------------|------------------------------------------------------|--------------------------|
| Face-to-face     | Spring semester                                      | Lithuanian and English   |

| Prerequisites                                                 |
|---------------------------------------------------------------|
| Prerequisites: Calculus I and II, Algebra, programming basics |

| Number of ECTS credits allocated | Student's workload | Contact hours | Individual work |
|----------------------------------|--------------------|---------------|-----------------|
| 5                                | 134                | 68            | 62              |

| Purpose of the course unit: programme competences to be developed                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                 |                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| <p>Purpose of the module – develop mathematical and programming skills by studying numerical methods to solve various mathematical problems. It is also aimed to develop communication skills in subject-related situations.</p> <p><b>Generic competences</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Communication and collaboration (<i>GC1</i>). <ul style="list-style-type: none"> <li>An ability to present, information, ideas, problems, and suggested solutions convincingly in official and second (foreign) language for specialists and non-specialists in written and verbal form (<i>GC1.1</i>).</li> </ul> </li> </ul> <p><b>Subject-specific competences:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Knowledge and skills of underlying conceptual basis (<i>SC4</i>). <ul style="list-style-type: none"> <li>An ability to apply mathematical foundations, knowledge of science and engineering, computer science theory, and algorithmic principles in software systems development (<i>SC4.2</i>).</li> <li>An ability to reason at an abstract level, to use formal notation, to prove the correctness, and to apply formalization and specification for real-world problems (<i>SC4.3</i>).</li> </ul> </li> </ul> |                                                 |                                                                    |
| Learning outcomes of the course unit                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Teaching and learning methods                   | Assessment methods                                                 |
| Define and illustrate the main concepts related to Numerical Analysis.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Lecture<br>Individual reading<br>Consultations  | Exam on paper                                                      |
| Formulate and prove main propositions related to Numerical Analysis.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |                                                                    |
| Apply propositions of Numerical Analysis to solve standard problems analytically and/or using computer software.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Solutions to practical problems with a computer | Presentation of practical exercises and defense of their solutions |

| Apply relevant Python libraries for mathematical calculations, graphing, etc.                                                                                                                                                                                                                                                          | Implementation of the algorithmic solution, analysis of algorithm performance |           |          |          |                      |                    |                                       | Midterm exam on paper |                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|----------|----------|----------------------|--------------------|---------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Solve and analyze mathematical models, reach conclusions based on computer computations and justify them logically.                                                                                                                                                                                                                    |                                                                               |           |          |          |                      |                    |                                       |                       |                                                                                                                   |
| Course content                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Individual work: time and assignments                                         |           |          |          |                      |                    | Self-study work: time and assignments |                       |                                                                                                                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Lectures                                                                      | Tutorials | Seminars | Practice | Laboratory Work (LW) | Tutorial during LW | Contact hours                         | Self-study hours      | Assignments                                                                                                       |
| 1. Computational errors. Programming tools for mathematical problems                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2                                                                             |           |          |          | 2                    |                    | 4                                     | 4                     | Practical exercises for introduction into computational science                                                   |
| 2. <b>Rootfinding of nonlinear equations:</b> Bisection method, Fixed-point iterations, Newton's method. Solution of systems of nonlinear equations.                                                                                                                                                                                   | 4                                                                             |           |          |          | 4                    |                    | 8                                     | 8                     | Individual reading, homework, practical solution of nonlinear equations                                           |
| 3. <b>Direct methods for the solution of linear systems:</b> Definitions and applications. Gaussian method. Basic element selection method. LU Factorization, Cholesky Factorization.                                                                                                                                                  | 6                                                                             |           |          |          | 6                    |                    | 8                                     | 4                     | Individual reading, homework, practical solution of systems of linear equations. preparation for the midterm exam |
| 4. <b>Iterative methods for the solution of linear systems:</b> Jakobi, Gauss-Seidel methods. Norms of vectors and matrices. Gradient decent method.                                                                                                                                                                                   | 4                                                                             |           |          |          | 4                    |                    | 8                                     | 4                     |                                                                                                                   |
| 5. <b>Approximation of Functions and data:</b> Polynomial Interpolation: linear, quadratic interpolation, Newton's interpolating polynomial. Finite differences and approximation of derivative. Interpolation polynomial remainder term. Spline interpolation: quadratic, cubic splines. Approximation by the method of least squares | 6                                                                             |           |          |          | 6                    |                    | 12                                    | 8                     | Individual reading, homework, practical solution of interpolation problems.                                       |
| 6. <b>Numerical integration:</b> Newton-Cotes quadrature formula: rectangle, trapezoidal, Simpson formulas. Estimation of the error of numerical integration. Adaptive integration algorithms                                                                                                                                          | 4                                                                             |           |          |          | 4                    |                    | 8                                     | 8                     | Individual reading, homework, practical solution of numerical integration problems.                               |
| 7. <b>Ordinary differential equations:</b> Main concepts of the theory of differential equations, analytical solutions and applications. Numerical solution methods: Euler, Predictor-Corrector, Runge–Kutta methods. Approximation error, stability and convergence.                                                                  | 6                                                                             |           |          |          | 6                    |                    | 16                                    | 8                     | Individual reading, homework, analytical and numerical solution of ordinary differential equations                |
| Exam                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                               |           |          |          |                      |                    | 4                                     | 18                    |                                                                                                                   |
| Total                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 32                                                                            |           |          |          | 32                   |                    | 68                                    | 62                    |                                                                                                                   |

| Assessment strategy | Weight % | Deadline            | Assessment criteria                                                                                               |
|---------------------|----------|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Practical tasks     | 50       | During the semester | For the laboratory work, five problems have to be solved with Python (or equivalent). During assessment, students |

|                           |    |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------|----|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                           |    |                        | <p>have to demonstrate and explain their solution in the computer class.</p> <p>A maximal number of points is given for the full and correct solution; some points are given for partial solutions. Bonus points can be scored for optional tasks.</p>                                                                                                                                                                                                                                  |
| Midterm test              | 10 | Middle of the semester | <p>The midterm test consists of two to free practical problems to be solved on paper</p> <p>A maximal number of points is given if the student solved the task fully and correctly, calculated numerical value. Part of the points is scored for the incomplete solution.</p>                                                                                                                                                                                                           |
| Exam                      | 40 | Exam session           | <p>The final exam consists of theoretical questions and two to free practical problems to be solved on paper.</p> <p>A maximal number of points is given if the student answered the questions: correct definitions and examples were given, correct statements and their proofs were provided, and practical problems were solved. Some points are given for partial answers.</p> <p>At least 1 point out of 4 (at least 25% of the exam score) has to be scored to pass the exam.</p> |
| Rules of external studies |    |                        | <p>Prerequisites: at least 50% of points during the semester must be scored to be allowed to take the external studies. Only the exam can be retaken, scores earned in previous year will carry over.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                               |

| Author                                                       | Publishing year | Title                                                                                                                | Issue No or volume | Publishing house or Internet site |
|--------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| <b>Required reading</b>                                      |                 |                                                                                                                      |                    |                                   |
| R. Čiegis, V. Būda                                           | 1997            | Computing mathematics (orig. V.Skaičiuojamoji matematika )                                                           |                    | Vilnius, TEV, 1997.               |
| R.Čiegis                                                     | 2003            | Numerical methods for solution of differential equations (orig. Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai) |                    | Vilnius, Technika, 2003           |
| <b>Optional reading</b>                                      |                 |                                                                                                                      |                    |                                   |
| A. Quarterony, F. Salery and P. Gervazo                      | 2010            | Scientific Computing with MATLAB and OCTAVE                                                                          |                    | Springer                          |
| A. Quarterony, R. Sacco and P F. Salery                      | 2000            | Numerical mathematics                                                                                                |                    | Springer                          |
| W.H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterlig, B. P. Flaneery | 2009            | Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing                                                              |                    | Cambridge University Press        |