

Kaip siūlome plėsti matematikos mokymo(si) Horizontus?

MATEMATIKOS VADOVĖLIŲ KOMPLEKTAI 2024 – 2025

2024-02-03

Jolita Andriškevičiūtė – Raišienė
J.Raisiene@sviesa.lt

MATEMATIKA. KAS SUKURTA, KAS KURIAMA?

HORIZONTALAI

2023-2024	VADOVĖLIS 1 DALIS	VADOVĖLIS 2 DALIS	PRATYBŲ SĄŠIUVINIS 1 DALIS	PRATYBŲ SĄŠIUVINIS 2 DALIS	REKOMENDACIJOS MOKYTOJUI EDUKA KLASĖ	SKAITMENINIS TURINYS EDUKA KLASĖ
5 KLASĖ	+	+	+	+	+	+
9 KLASĖ	+	+	-	-	+	+

	Vadovėlis 1 DALIS	Vadovėlis 2 DALIS	Pratybų sąsiuvinis 1 DALIS	Pratybų sąsiuvinis 2 DALIS	Ilgalaikis planas EDUKA KLASĖ	Vadovėlio užduočių atsakymai EDUKA KLASĖ	Pratybų sąs. užduočių atsakymai EDUKA KLASĖ	2024-2025
6 KLASĖ	+	+	+	+	+	+	+	+
7 KLASĖ	+	+	+	+	+	+	+	+
10 KLASĖ	+	+	-	-	+	+	-	+
11 KLASĖ	+	+	-	-	+	+	-	+

Pagal vidurinio
ugdymo
programą

Konsultantai

- Doc. dr. Kęstutis Skauminas – neuroedukacijos aspektai mokymosi turinyje.
- Prof. Kristupas Sabolius – kūrybiškumo skatinimo elementai ir formos.
- Lygių teisių galimybių specialistai – stereotipų atpažinimas kontekstuose ir iliustracijose.

Apklausos ir tyrimai prieš kuriant turinį

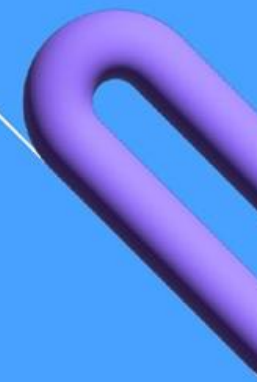
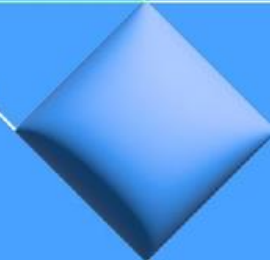
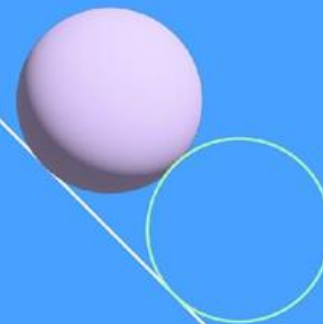
- analizuojame Jūsų mokytojų atsakymus – kas svarbu, kokie akcentai turi būti vadovėlyje.
- Analizuojame mokinių atsakymus - kas jiems svarbu? Ko tikisi, kas būtina?

Autoriai

- Turinį kuria atrinktos autorių komandos: dalyko ekspertai, mokytojai praktikai, mokslininkai.

Vertintojai ir recenzentai

- Kiekvieno vadovėlio turinį tyrinėja ir konsultuoja autorių komandas 1–2 dalyko recenzentai.
- Turinio kokybę bei atitiktį ŠMM nustatytiems vadovėlio vertinimo kriterijams vertina 3 išoriniai vertintojai.



Matematika 6 klasei, serija „Horizontalai“

6 KLASĖ. VADOVĖLIO KOMPLEKTĄ SUDARO:

Vadovėlio I dalis



Vadovėlio II dalis



EDUKA klasė



Pratybos I dalis



Pratybos II dalis



„EDUKA klasėje“ rasite serijos „Horizontai“ matematikos vadovėlio 6 klasei:

- Vadovėlius (1 ir 2 dalis)
- Rekomendacijas mokytojui
- Metų veiklos planą
- Vadovėlio užduočių atsakymus
- Pratybų užduočių atsakymus
- Rekomendacijas, idėjas, patarimus

6 KLASĖ. VADOVĖLIO KOMPLEKTĄ KURIANTI KOMANDA

Ilona Tulabienė

Matematikos ir fizikos mokytoja
metodininkė, edukacinių leidinių autorė



Odeta Janušaitienė

Matematikos mokytoja,
vadovėlių autorė



Algirdas Ališauskas

Matematikos mokytojas



Angelė Balčienė

Vyr. matematikos mokytoja



Dalyko realizavimo konsultantas –
Matematikos ekspertas
Vytautas Miežys



6 KLASĖ. VADOVĖLIO I DALIES TURINYS

I ciklas. Sveikieji skaičiai

Paslaptinga aukso kasykla

Prisimename**Ciklo temos**

1. Sveikieji skaičiai
2. Sveikųjų skaičių palyginimas
3. Veiksmai su sveikaisiais skaičiais
4. Stačiakampė koordinatų plokštuma
5. Koordinatų metodas
6. Koordinatų metodo taikymas realiame gyvenime

Pasitikriname**Apibendrinimas****Čempionų lyga****II ciklas. Tiesioginis proporcingumas****Prisimename****Ciklo temos**

1. Tiesiogiai proporcingi dydžiai
2. Grafikai
3. Tiesioginio proporcingumo sąryšio taikymas realiame gyvenime

4. Santykis ir proporcija

5. Pagrindinė proporcijos savybė

6. Matematika virtuvėje. Projektinis darbas

Pasitikriname**Apibendrinimas****Čempionų lyga****III ciklas. Racionalieji skaičiai**

Kiek „matematikos“ yra virtuvėje?

Prisimename**Ciklo temos**

1. Racionalieji skaičiai
2. Trupmena kaip dalmuo
3. Baigtiniai ir begaliniai dešimtainiai skaičiai
4. Racionaliųjų skaičių palyginimas

Pasitikriname**Apibendrinimas****Čempionų lyga****IV ciklas. Trikampių lygumas**

Ar svarbu pastebėti daiktų panašumą aplinkoje?

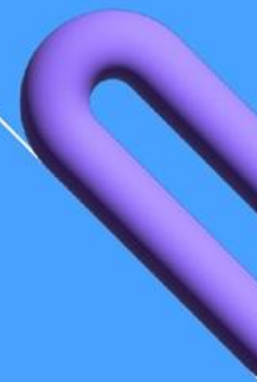
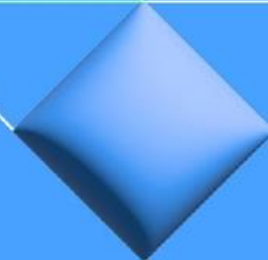
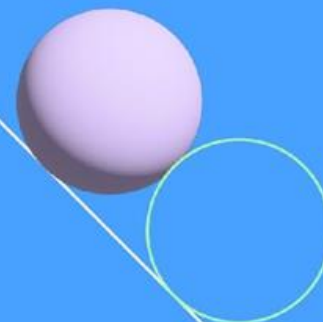
Prisimename**Ciklo temos**

1. Lygių elementų braižymas
2. Trikampių braižymas
3. Trikampio egzistavimo taisyklė
4. Lygūs trikampiai ir jų lygumo požymiai

Pasitikriname**Apibendrinimas****Čempionų lyga****V ciklas. Trupmenos****Prisimename****Ciklo temos**

1. Teigiamųjų trupmenų daugyba ir dalyba
2. Racionaliųjų skaičių sudėtis ir atimtis
3. Racionaliųjų skaičių daugyba ir dalyba
4. Veiksmų su racionaliaisiais skaičiais taikymas sprendžiant įvairaus konteksto uždavinius

Pasitikriname**Apibendrinimas****Čempionų lyga**



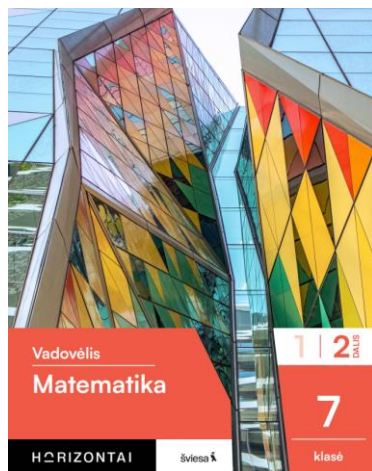
Matematika 7 klasei, serija „Horizontalai“

7 KLASĖ. VADOVĖLIO KOMPLEKTĄ SUDARO

Vadovėlio I dalis



Vadovėlio II dalis



EDUKA klasė



Pratybos I dalis



Pratybos II dalis



„EDUKA klasėje“ rasite serijos „Horizontai“ matematikos vadovėlio 7 klasei:

- Vadovėlius (1 ir 2 dalis)
- Rekomendacijas mokytojui
- Metų veiklos planą
- Vadovėlio užduočių atsakymus
- Pratybų užduočių atsakymus
- Rekomendacijas, idėjas, patarimus

7 KLASĖ. VADOVĖLIO KOMPLEKTĄ KURIANTI KOMANDA

Neringa Jasiūnaitė

Vyr. Matematikos mokytoja,
edukacinių leidinių autorė



Andrius Berniukevičius

Matematikos mokytojas



Aliona Barkauskienė

Matematikos mokytoja metodininkė,
edukacinių leidinių autorė



Dovydas Česnuitis

Matematikos mokytojas



Dalyko realizavimo konsultantas –
Matematikos ekspertas
Vytautas Miežys



7 KLASĖ. VADOVĖLIO I DALIES TURINYS

I ciklas. Laipsniai*Kur realiame gyvenime taikome laipsnius?***Prisimename****Ciklo temos**

1. Laipsnis
2. Laipsnių su vienodais pagrindais daugyba ir dalyba
3. Laipsnių su vienodais rodikliais daugyba ir dalyba
4. Laipsnio kėlimas laipsniu
5. Laipsnis su sveikuoju rodikliu
6. Veiksmai su laipsniais
7. Standartinė skaičiaus išraiška

Pasitikriname**Ciklo apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga****II ciklas. Nelygybės***Ar nelygybes galime panaudoti realiame gyvenime?***Prisimename****Ciklo temos**

1. Skaitinių nelygybių savybės
2. Skaičių intervalai
3. Pirmojo laipsnio nelygybių sprendimas
4. Tekstinių uždavinių sprendimas sudarant nelygybes
5. Pirmojo laipsnio nelygybių sistemos
6. Pirmojo laipsnio nelygybių sistemų sprendimas
7. Tekstinių uždavinių sprendimas sudarant nelygybių sistemas

Pasitikriname**Ciklo apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga****III ciklas. Dydžių proporcingumas***Kaip priimti sprendimus remiantis matematika?***Prisimename****Ciklo temos**

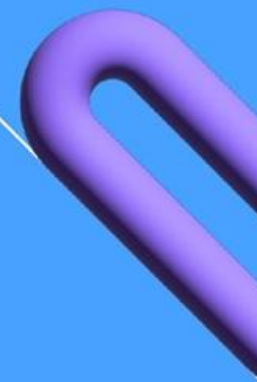
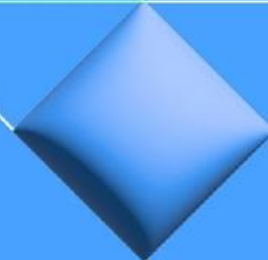
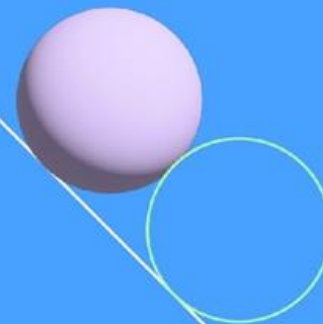
1. Atvirkščiai proporcingi dydžiai
2. Dviejų kintamųjų ryšio išraiška formule, lentele, grafiku
3. Dydžių proporcingumas mūsų aplinkoje

Pasitikriname**Ciklo apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga****IV ciklas. Plokščiosios figūros***Kur realiame gyvenime galime pastebėti įvairias geometrines figūras?***Prisimename****Ciklo temos**

1. Atkarpos ir kampo dalijimas pusiau
2. Trikampio pusiaukampinės
3. Trikampio pusiaukraštinės
4. Trikampio aukštinės
5. Tiesių tarpusavio padėties
6. Tiesių lygiagretumo požymiai
7. Brėžimo uždaviniai

Pasitikriname**Ciklo apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga**

Tamo grupė



Matematika 10 klasei, serija „Horizontalai“

VADOVĖLIO KOMPLEKTĄ 10 KLASEI SUDARO

Vadovėlio I dalis



Vadovėlio II dalis



EDUKA klasė



„EDUKA klasėje“ rasite serijos „Horizontai“ matematikos vadovėlio 10 klasei:

- Vadovėlius (1 ir 2 dalis)
- Rekomendacijas mokytojui
- Metų veiklos planą
- Vadovėlio užduočių atsakymus
- Rekomendacijas, idėjas, patarimus

10 KLASĖ. VADOVĖLIO KOMPLEKTĄ KURIANTI KOMANDA



Jūratė Gedminienė
Matematikos mokytoja ekspertė



Irena Šukienė
Matematikos mokytoja ekspertė



Jolanta Jačiauskaitė
Matematikos mokytoja metodininkė



Daiva Riukienė
Matematikos mokytoja ekspertė



Ingrida Brazauskienė
Matematikos mokytoja ekspertė



Dalyko realizavimo konsultantas
Prof., habil. dr. Rimas Norvaiša

10 KLASĖ. VADOVĖLIO I DALIES TURINYS

I ciklas. Dėsningumai ir matematinių problemų sprendimas**Prisimename**

Procentai (paprasčiausi drėkinimo ir džiovinimo uždaviniai)

Procentai (lydiniai ir mišiniai)

Sudėtinių procentų formulė

Ciklo temos

1. Fibonačio skaičių seka
2. Aukso pjūvis
3. Procentų uždaviniai

Pasitikriname**Apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga****II ciklas. Racionaliosios lygtys****Prisimename**

Tiesinės lygtys ir jų sprendinių skaičius

Kvadratinės lygtys ir jų sprendinių skaičius (nesudėtingi uždaviniai su parametru)

Tekstiniai uždaviniai (judėjimo ir darbo)

Ciklo temos

1. Racionaliosios lygtys
2. Judėjimo uždaviniai
3. Darbo uždaviniai
4. Dar daugiau tekstinių uždavinių

Pasitikriname**Apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga****III ciklas. Lygčių sistemos****Žemyn upe, aukštyn upe...****Prisimename**

Lygčių sistemos sprendimas keitimo būdu

Lygčių sistemos sprendimas sudėties būdu

Lygčių sistemos sprendimas grafiniu būdu

Ciklo temos

1. Lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra tiesinė, o kita – trupmeninė
2. Tekstiniai uždaviniai, sprendžiami sudarant lygčių sistemą, kurios viena lygtis yra trupmeninė
3. Įvairaus konteksto situacijų modeliavimas lygčių sistemomis

Pasitikriname**Apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga****IV ciklas. Kvadratinės nelygybės****Prisimename**

Tiesinės nelygybės (aptariant atvejus, kada nelygybė neturi

sprendinių, kada turi be galo daug sprendinių)

Tiesinių nelygybių sprendimas grafiniu būdu

Tiesinių nelygybių sistemos

Dvigubosios nelygybės

Ciklo temos

1. Kvadratinė nelygybių sprendimas grafiniu būdu
2. Kvadratinė nelygybių sprendimas algebriniu būdu
3. Intervalų metodas

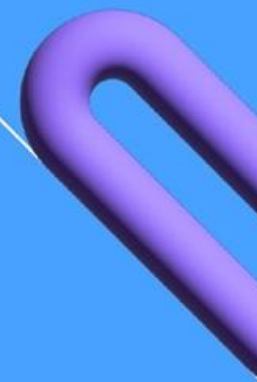
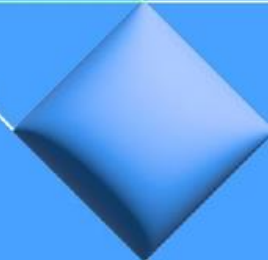
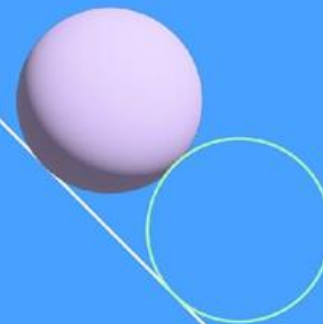
Pasitikriname**Apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga****V ciklas. Panašiosios figūros****Prisimename**

Trikampio ir trapecijos vidurinė linija (pagrindžiamos savybės)

Ciklo temos

1. Trikampių panašumo požymiai (ir įrodymo uždaviniai)
2. Panašiujų trikampių perimetrų ir plotų santykis
3. Trikampio pusiaukraštinių savybės (su įrodymais)
4. Trikampio pusiaukampinės savybė (su įrodymu)
5. Panašieji daugiakampiai

Pasitikriname**Apibendrinimas****Žvilgsnis atgal****Čempionų lyga**



Matematika 11 klasei, serija „Horizontalai“

MATEMATIKOS VADOVĖLIO 11 KLASEI KOMPLEKTĄ SUDARO:

Vadovėlio I dalis



Vadovėlio II dalis



EDUKA klasė



„EDUKA klasėje“ rasite serijos „Horizontai“ matematikos vadovėlio 11 klasei:

Vadovėlius (1 dalis, 2 dalis)

Rekomendacijas mokytojui

- Metų veiklos planas
- Vadovėlio užduočių atsakymai
- Rekomendacijos, idėjos, patarimai.

11 KLASĖ. VADOVĖLIO KOMPLEKTĄ KURIANTI KOMANDA

Vilija Šileikienė

Matematikos mokytoja
ekspertė, vadovėlių autorė



Ramunė Dranseikienė

Matematikos mokytoja ekspertė,
vadovėlių autorė



Laura Kuldoš

Matematikos mokytoja ekspertė,
edukacinių leidinių autorė

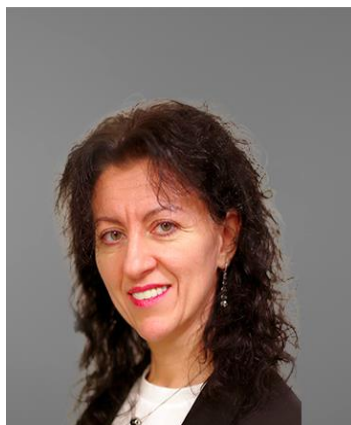


Roma Greičiūtė

Matematikos mokytoja metodininkė,
vadovėlių autorė



Vadovėlio turinio metodininkė –
Inga Jomantienė



Dalyko realizavimo konsultantas –
Prof., habil. Dr. Rimas Norvaiša



11 KLASĖ. VADOVĖLIO STRUKTŪRA

Vadovėlj sudaro:

- Ciklai
- Temos
- Priedai

I Ciklo įvadas

Priedas

Tema(os)

Ciklo apibendrinimas

Priedai

- Ciklo pavadinimas.
- Ciklo turiniui aktualus kontekstas.
- Ciklo turinys.

- Prisimename – svarbiausios taisyklės, pavyzdžiai, formulės, kurių reikės mokantis naują ciklą.

- Temos pavadinimas.
- Temos santrauka – formulė, teorema, dėsnis.
- Sėkmės kriterijai.
- Teorija su pavyzdžiais, patarimais.
- Uždaviniai teorijai įtvirtinti su patarimais.
- Refleksijos klausimas.

- Teorinė santrauka – konspektas.
- Pasitikrinimo užduotys.
- Įsivertinimas.

- Užduotys **tarpiniam pasitikrinimams** pasiruošti.
- Užduotys **egzamino sėkmei**.
- Projektai.

II Ciklo įvadas

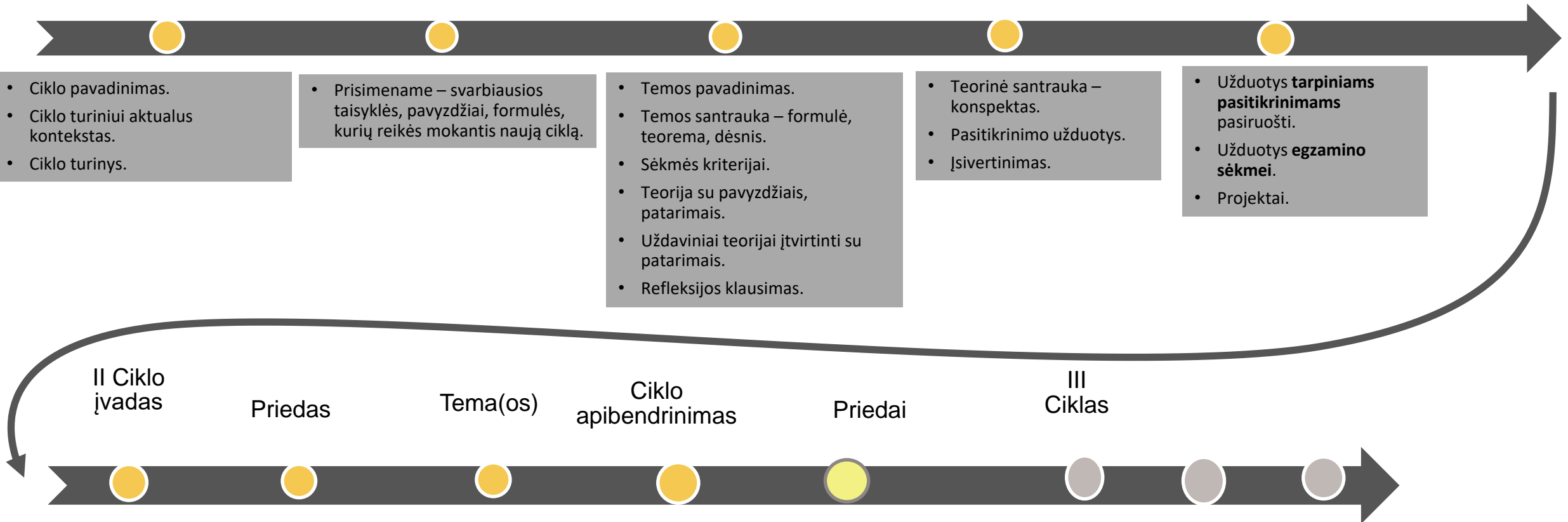
Priedas

Tema(os)

Ciklo apibendrinimas

Priedai

III Ciklas



Vadovėlio struktūra Ciklo įvadas

**II CIKLAS
PROGRESIJOS**

Ko labiau norėtumėte: gauti milijoną eurų iš karto ar pirmą dieną – 1 ct, antrą dieną – 2 ct, t. y. dvigubai daugiau negu pirmą dieną, trečią dieną – dvigubai daugiau negu antrąją ir taip visą mėnesį?

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad milijonas eurų būtų daugiau.

Tačiau prieš nusprenddami paskaičiuokime:

- pirmą dieną gautumėte 1 ct = 2^0 ct,
- antrą dieną – 2 ct = 2^1 ct,
- trečią dieną – 4 ct = 2^2 ct,
- ketvirtą dieną – 8 ct = 2^3 ct ir t. t.,
- o 30-tą dieną – 2^{29} ct = 536 870 912 ct = 5 368 709,12 Eur.

Kurį variantą rinktumėtės? Savo pasirinkimą argumentuokite.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

→ Šiame cikle

1. Skaičių seka
2. Aritmetinė progresija
3. Aritmetinės progresijos savybė
4. Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma
5. Geometrinė progresija
6. Geometrinės progresijos savybė
7. Geometrinės progresijos pirmųjų n narių suma
8. Nykstantoji geometrinė progresija

Gaunamų pinigų kiekis didėjo pagal progresijos taisyklę.

Kas yra progresijos, kokios jų savybės ir kaip jos taikomos sprendžiant gyvenimiškas problemas ar egzaminų užduotis, sužinosite šiame cikle.

3

Ciklo pavadinimas

Turiniui aktualus kontekstas

Ciklo turinys

Prisimename

Skaičių aibės

Natūralieji skaičiai: 1, 2, 3, 4, ... (žymima N).

Sveikieji skaičiai: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... (žymima Z).

Racionalieji skaičiai (skaičiai, kuriuos galima užrašyti baigtiniu arba begaliniu periodiniu dešimtainiu skaičiumi): -2; 1,5; 0; $\frac{1}{3}$; 5; 0,(6) (žymima Q).

Iracionalieji skaičiai: $\sqrt{2}$; π ; 0,3523... (žymima I).

Realieji skaičiai – visi racionali ir irracionalieji skaičiai (žymima R).

Funkcijos

Funkcija vadinama taisyklė, kuri kiekvienam skaičiui $x \in X$ priskiria vienintelį skaičių $y \in Y$; čia X ir Y yra skaičių aibės. Funkcija užrašoma taip: $y = f(x)$. Skaičius x vadinamas funkcijos argumentu, o skaičius y – funkcijos reikšme.

Laipsnių, šaknų ir logaritmų savybės

Prastinant reikšinius taikomos laipsnių, šaknų ir logaritmų savybės (žr. p. 00).

Pavyzdys

Apskaičiuokime:

a) $\frac{3^{200} + 3^{100} + 3^{200}}{3^{100}}$; b) $\lg 5 \cdot \log_5 1000$.

Sprendimas

a) $\frac{3^{200} + 3^{100} + 3^{200}}{3^{100}} = \frac{3 \cdot 3^{200}}{3^{100}} = \frac{3^{201}}{3^{100}} = 3^{101} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;

b) $\lg 5 \cdot \log_5 1000 = \lg 5 \cdot \frac{\lg 1000}{\lg 5} = \lg 1000 = 3$.

Atsakymas. a) $\frac{1}{3}$; b) 3.

1. Kuris skaičius nėra natūralusis?

- A 5100 B $\sqrt{25}$ C 27 D $\cos 60^\circ$

2. Raskite visas natūraliųjų skaičių x ir y poras, kurios tenkina lygybę $x^2 - y^2 = 99$.

3. Apskaičiuokite nelygybių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0, \\ (x - 5)^2 > (x - 5)(x + 5) \end{cases}$$

visų natūraliųjų sprendinių sumą.

4. Duota funkcija $f(x) = -x^2 + 5$.

- Apskaičiuokite funkcijos reikšmes, kai argumento reikšmės lygios 3 ir -3.
- Apskaičiuokite argumento reikšmę, su kuria funkcijos reikšmė lygi 4.
- Nustatykite, ar taškas $A(-1; 6)$ priklauso šios funkcijos grafikui.
- Nustatykite, su kuriomis argumento reikšmėmis ši funkcija įgyja teigiamas reikšmes.

5. Apskaičiuokite:

a) $\frac{2^{100} + 2^{100} + 2^{100} + 2^{100}}{2^{100}}$; b) $(-1)^{200} \cdot (-1)^{100} \cdot (-1)^2$;

c) $\frac{0,4^{200} \cdot 10^{200}}{2^{400}}$; d) $\frac{5^{2022} - 5^{2024}}{5^{2024}}$;

e) $8\sqrt[4]{25} + 5^{\sqrt{25}}$; f) $\log_5 5 \cdot \log_5 27$;

g) $\frac{\ln 216}{\ln \sqrt{6}}$; h) $\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$;

i) $(\sqrt{3} - 2)^{100} \cdot (\sqrt{3} + 2)^{100}$; j) $(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}$;

k) $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{8\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; l) $\log_{\sqrt{25}} \log_2 \lg 108$.

Procentai ir veiksmai su jais

Jei

- skaičiuojame p % skaičiaus x , gauname $\frac{p}{100} \cdot x$;
- skaičių x didiname p %, gauname $(1 + \frac{p}{100}) \cdot x$;
- skaičių x mažiname p %, gauname $(1 - \frac{p}{100}) \cdot x$.

Sudėtinių procentų formulė:

$$S_n = S \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n;$$

čia S – pradinė suma (dydis), S_n – galutinė suma (dydis) po n laikotarpių (kartų), p – procentai (palūkanos), n – laikotarpių (kartų) skaičius.

Lygtys

Kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinių formulė:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Prisiminkime, kaip sprendžiamos racionaliosios lygtys.

Pavyzdys

Išspręskime lygtį $\frac{2}{x} - \frac{4}{x+5} = 0$.

Sprendimas

$$\frac{2}{x} - \frac{4}{x+5} = 0, \quad \frac{2(x+5) - 4x}{x(x+5)} = 0, \quad \frac{-2x+10}{x(x+5)} = 0,$$

$$\begin{cases} -2x+10=0, & \begin{cases} x=5, \\ x(x+5) \neq 0, \end{cases} \\ x(x+5) \neq 0, & \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -5. \end{cases} \end{cases}$$

Atsakymas. 5.

Lygčių sistemų sprendimo būdai

Išspręsti lygčių sistemą – tai rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad lygčių sistema sprendinių neturi. Daugumą lygčių sistemų sprendžiamos keitimo arba sudėties būdu.

Pavyzdys

Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases} m + 5n = 16, \\ m - 6n = -17. \end{cases}$

Sprendimas

1 būdas (keitimo)

$$\begin{cases} m + 5n = 16, \\ m - 6n = -17, \\ m = 16 - 5n, \\ 16 - 5n - 6n = -17, \\ -11n = -17 - 16, \\ -11n = -33 \mid : (-11), \\ n = 3, \\ m = 16 - 5 \cdot 3 = 1. \end{cases}$$

Atsakymas. (1; 3).

2 būdas (sudėties)

$$\begin{cases} m + 5n = 16, \\ m - 6n = -17 \mid \cdot (-1), \\ + \begin{cases} m + 5n = 16, \\ -m + 6n = 17, \\ 11n = 33 \mid : 11, \\ n = 3, \\ m + 5 \cdot 3 = 16, \\ m = 16 - 15, \\ m = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Atsakymas. (1; 3).

6. Telefonui, kainuojančiam 350 Eur, buvo pritaikyta 15 % nuolaida. Kiek kainavo telefonas su nuolaida?

7. Sporto klubo metinis abonementas kainuoja 240 Eur. Pratešiant jį, kiekvienais metais jo kaina mažinama 12 %. Kiek kainuos metinis abonementas trečiaisiais sporto klubo lankymo metais?

8. Internetinėje parduotuvėje lauko sūpynės kainuoja 480 Eur. Parduotuvė daro akciją „Pasidalink mūsų parduotuvės reklama savo socialiniame tinkle ir pirk sūpynės už 400 eurų“. Kiek procentų parduotuvė sumažina sūpynių kainą už pasidalinimą socialiniame tinkle?

9. Išspręskite lygtis

a) $3x - 5 = 2 - (x + 1)$;

b) $x^2 + 5x = x - 3$;

c) $(x + 1)^2 = 2(x + 5)$;

d) $5x^2 = 0,2$;

e) $x^2 = -25$;

f) $0,6x^2 + 1 = 5,8$;

g) $\frac{3}{x-5} = \frac{18}{x}$;

h) $\frac{x}{x-5} + \frac{3}{x+5} = 2,2$;

i) $(x^2 - 16)(x^2 + 1) = 0$;

j) $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}$;

k) $\frac{x-15}{x^2-3x} + \frac{3x+1}{x^2-9} = 0$.

10. Išspręskite lygčių sistemas:

$$\begin{cases} a) \begin{cases} x + 2y = 21, \\ 2x + y = 12; \end{cases} & b) \begin{cases} 2x + y = 2, \\ 6x + y^2 = 4; \end{cases} \\ c) \begin{cases} 2a + 3b = 5, \\ 3a + 2b = 0; \end{cases} & d) \begin{cases} m + n^2 = 2,25, \\ 2m + n = 4,5; \end{cases} \\ e) \begin{cases} x + y = 12, \\ x \cdot y = 32; \end{cases} & f) \begin{cases} 3m - n = 1, \\ m^2 + n^2 = 5; \end{cases} \\ g) \begin{cases} 5x + 6y = 18, \\ 3x - 12y = 3; \end{cases} & h) \begin{cases} x + 5y = 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

11. Saulė norėjo susitaupyti vasaros kelionei 800 eurų, todėl savaitgaliais dirbo kavinėje. Už darbo valandą šeštadienį darbdavys jai mokėjo po 8 eurus, o už darbo valandą sekmadienį – po 10 eurų. Kiek valandų Saulė dirbo šeštadieniais ir kiek sekmadieniais, jei reikiamą sumą ji susitaupė per 96 darbo valandas?

Svarbiausios taisyklės, formulės, apibrėžtys, pavyzdžiai, kurių prireiks mokantis naujas ciklo temas.


Vadovėlio struktūra

Tema

Temos pavadinimas

Temos santrauka (formulė, teorema, dėsnis)

Sėkmės kriterijai ir raktiniai žodžiai



mokslink/bbz

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$;

čia S_n – pirmųjų n narių suma,
 a_1 – pirmasis progresijos narys,
 a_n – n -tasis progresijos narys,
 n – sudedamųjų narių skaičius.

► SĖKMĖS KRITERIJAI

- Tinkamai taikau aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę.
- Įrodau aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę.
- Sudarau veiksmų planą, taikydamas šios progresijos pirmųjų n narių sumos formulę.
- Sprenddamas gyvenimiško turinio uždavinius, interpretuoju gautus rezultatus ir darau pagrįstas išvadas.

RAKTINIAI ŽODŽIAI

aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma

Kaip apskaičiuoti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą?

Ugnė ruošiasi kelionei į Ištalią ir taupo pinigus. Ji nusprendė taupyti 100 dienų, pirmą dieną taupyklę įmėsda 2 Eur, o kiekvieną kitą dieną – 10 ct daugiau nei ankstesnę dieną. Kiek pinigų Ugnė ras po 100 dienų atidariusi taupyklę?

Kaip apskaičiuoti šią pinigų sumą? Žinoma, galima apskaičiuoti kiekvienos dienos indėlį ir rasti šimto dėmenų sumą. Bet gal yra kitų skaičiavimo būdų?

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą galima apskaičiuoti pagal šią formulę:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ (su kiekvienu } n \in \mathbb{N}\text{);}$$

čia S_n – pirmųjų n narių suma, a_1 – pirmasis progresijos narys, a_n – n -tasis progresijos narys, n – sudedamųjų narių skaičius.

Įrodykite šią formulę.

Įrodymas
 Parašykime progresijos n narių sumą du kartus, bet antrą kartą dėmenis išdėstykite atvirkščiai:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1.$$

Abi lygybės sudėję panarius, gauname:
 $2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$

Įsitinkime, kad kiekviena suskliausta suma dešinėje lygybės pusėje lygi $a_1 + a_n$:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n \text{ ir t. t.}$$

Kadangi dešinėje pusėje yra n suskliaustų sumų, kurių kiekviena lygi $a_1 + a_n$, tai teisinga lygybė

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad | : 2, \text{ arba } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Įrodyta.

Įrodytoje formulėje vietoj a_n išrašę n -tojo nario išraišką, gausime kitą aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n.$$

Dabar apskaičiuokime, kiek pinigų Ugnė ras taupyklėje. Mums patogiau remtis formule $S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$, nes žinome pirmos dienos indėlį $a_1 = 2$ Eur, indėlių skirtumą $d = 0,1$ Eur ir dienų skaičių $n = 100$. Įrašome šiuos duomenis į formulę:

$$S_{100} = \frac{2 \cdot 2 + 0,1 \cdot (100-1)}{2} \cdot 100 = 695 \text{ (Eur).}$$

PATARIMAS

Aritmetinės progresijos sumos formulę $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ taikome, kai žinome pirmąjį ir paskutinį progresijos narį, o formulę $S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$ – kai žinome pirmąjį progresijos narį ir skirtumą d .

Teorijos aiškinimas su patarimais ir pavyzdžiais.

1 pavyzdys
 Apskaičiuokime aritmetinės progresijos pirmųjų šešiolikos narių sumą, kai pirmieji progresijos nariai yra $-12, -5, 2, 9, \dots$

Sprendimas

1 būdas

$$a_1 = -12,$$

$$d = a_2 - a_1 = -5 - (-12) = 7.$$

Pritaikę aritmetinės progresijos n -tojo nario formulę, apskaičiuojame narį a_{16} :

$$a_{16} = -12 + 7(16-1) = -12 + 7 \cdot 15 = 93.$$

Duomenis įrašome į aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$:

$$S_{16} = \frac{-12 + 93}{2} \cdot 16 = 648.$$

2 būdas

$$a_1 = -12,$$

$$d = a_2 - a_1 = -5 - (-12) = 7.$$

Įrašome žinomus duomenis į aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę $S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$:

$$S_{16} = \frac{2 \cdot (-12) + 7 \cdot (16-1)}{2} \cdot 16 = \frac{-24 + 105}{2} \cdot 16 = 648.$$

Atsakymas. 648.

2 pavyzdys

Apskaičiuokime aritmetinės progresijos $6, 1, -4, -9, \dots, -109$ visų narių sumą.

Sprendimas

Iš sąlygos žinome, kad pirmasis narys yra $a_1 = 6$, o paskutinis narys $a_n = -109$.

Taikysime aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę, bet pirmiausia apskaičiuokime n , t. y. sužinokime, kiek narių yra šioje progresijoje.

Remiamės aritmetinės progresijos n -tojo nario formule:

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$a_n = -109,$$

$$a_1 = 6,$$

$$d = a_2 - a_1 = 1 - 6 = -5,$$

$$-109 = 6 - 5 \cdot (n-1),$$

$$-109 = 6 - 5n + 5,$$

$$5n = 11 + 109,$$

$$5n = 120 \quad | : 5,$$

$$n = 24.$$

Įrašome žinomus duomenis į aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę:

$$S_{24} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot 24 = \frac{6 + (-109)}{2} \cdot 24 = -1236.$$

Atsakymas. -1236.

Pamėginame dalyje – „apšilimas“, lengvi uždaviniai teorijai įtvirtinti.

◀ PAMĖGINAME

- Apskaičiuokite aritmetinės progresijos $-24, -15, -6, 3, \dots$ pirmųjų dvidešimties narių sumą S_{20} .
- Apskaičiuokite aritmetinės progresijos $19, 9, -1, \dots, -111$ pirmųjų dvidešimties narių sumą S_{20} .

Vadovėlio struktūra Tema

3. Žinomi aritmetinės progresijos nariai $a_2 = 13$, $a_7 = 29$. Apskaičiuokite šios progresijos pirmųjų aštuonių narių sumą S_8 . Remkitės patarimu.
4. Aritmetinės progresijos n -tojo nario formulė yra $b_n = 0,6n - 12$.
- 1) Apskaičiuokite narį b_1 .
 - 2) Raskite šios progresijos skirtumą d .
 - 3) Apskaičiuokite S_{25} .

PATARIMAS

- 1) Remdamiesi aritmetinės progresijos n -tojo nario formule, narius a_2 ir a_7 išreikškite pirmuoju nariu a_1 ir skirtumu d , apskaičiuokite pirmąjį narį a_1 bei skirtumą d .
- 2) Apskaičiuokite ieškomą sumą. Taikykite aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę.
- 3) Aptarkite kitą galimą šio uždavinio sprendimo būdą.

Kaip rasti n -tąjį narį, kai žinoma pirmųjų n narių sumos S_n formulė?

Žinodami aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę, galime parašyti progresijos n -tojo nario išraišką. Tarkime lygybės:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} \quad (2)$$

Matome, kad šios sumos skiriasi vienu nariu. Jei iš 1 lygybės atimsime 2 lygybę, gausime narį a_n , t. y. $a_n = S_n - S_{n-1}$.

SVARBU!

Formulė $a_n = S_n - S_{n-1}$ teisinga visiems progresijos nariams, išskyrus pirmąjį, o pirmasis narys apskaičiuojamas taip: $a_1 = S_1$.

- 3) Norint parašyti n -tojo nario formulę, reikia apskaičiuoti pirmąjį narį a_1 ir skirtumą d . $a_1 = S_1 = 9 \cdot 1 - 4 \cdot 1^2 = 9 - 4 = 5$.

Apskaičiuojame skirtumą d :
 $a_n = a_1 + 3d$, todėl $a_4 - a_1 = 3d$;
 $-19 - 5 = 3d$,
 $3d = -24$; 3,
 $d = -8$.

Galime parašyti n -tojo nario formulę:
 $a_n = a_1 + d(n - 1)$,
 $a_n = 5 - 8 \cdot (n - 1) = 5 - 8n + 8 = 13 - 8n$.

Atsakymas. 1) -310; 2) -19; 3) $a_n = 13 - 8n$.

3 pavyzdys
 Aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = 9n - 4n^2$.

- 1) Apskaičiuokite pirmųjų dešimties šios progresijos narių sumą S_{10} .
- 2) Apskaičiuokite narį a_4 .
- 3) Parašykime šios progresijos n -tojo nario formulę.

Sprendimas

- 1) Į sumos formulę $S_n = 9n - 4n^2$ įrašome $n = 10$:
 $S_{10} = 9 \cdot 10 - 4 \cdot 10^2 = 90 - 400 = -310$.
- 2) Žinome, kad $a_n = S_n - S_{n-1}$, todėl
 $a_4 = (9 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2) - (9 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2) = -28 - (-9) = -19$.

PAMĖGINAME

Aritmetinės progresijos b_1, b_2, b_3, \dots pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = 1,5n^2 - 13,5n$.

- 1) Apskaičiuokite pirmųjų penkiolikos progresijos narių sumą S_{15} .
- 2) Apskaičiuokite b_1, b_2, b_3 .
- 3) Parašykite šios progresijos n -tojo nario b_n formulę.

Kaip kitu būdu užrašyti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą?

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą galima žymėti graikiška raide Σ (tariama „sigma“):

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

4 pavyzdys

Aritmetinės progresijos n -tojo nario formulė yra $a_n = 13n - 20$. Užrašykime pirmųjų dvidešimt penkių šios progresijos narių sumą ir ją apskaičiuokime.

Sprendimas

Ieškomą sumą galime užrašyti taip:

$$\sum_{n=1}^{25} (13n - 20) = -7 + 6 + 19 + \dots + 305 = \frac{-7+305}{2} \cdot 25 = 3725.$$

Atsakymas. 3725.

SPRENDŽIAME UŽDAVINIUS

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulų taikymas įvairiose matematinėse situacijose

1. Aritmetinės progresijos (a_n) pirmasis narys yra $a_1 = 8$, skirtumas $d = -6$.

- 1) Apskaičiuokite septintąjį progresijos narį.
- 2) Apskaičiuokite pirmųjų septynių narių sumą S_7 .
- 3) Apskaičiuokite pirmųjų šešių narių sumą S_6 .
- 4) Įsitikinkite, kad $a_7 = S_7 - S_6$.

- b) Aritmetinės progresijos (b_n) pirmasis narys yra $b_1 = -12$, skirtumas $d = -5$.

- 1) Apskaičiuokite dešimtąjį progresijos narį b_{10} .
- 2) Apskaičiuokite pirmųjų devynių narių sumą S_9 .
- 3) Apskaičiuokite pirmųjų aštuonių narių sumą S_8 .
- 4) Įsitikinkite, kad $b_8 = S_8 - S_7$.

2. Apskaičiuokite aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą S_n :

- a) S_6 kai $a_1 = -13$, $a_6 = 125$;
- b) S_{22} kai $a_1 = 5,4$, $a_{22} = -12,8$;
- c) S_{20} kai $a_1 = 5\sqrt{3}$, $a_{20} = 13\sqrt{3}$;
- d) S_{20} kai $a_1 = \frac{1}{20}$, $a_{20} = -\frac{7}{24}$.

Remkitės patarimu.

PATARIMAS

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą skaičiuokite pagal formulę $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.



Sprendžiame uždavinius dalyje – gausybė uždavinių. Prie tam tikrų uždavinių rasite tikslingus patarimus – pagalbą mokiniams. Uždaviniai pateikti sudėtingėjimo tvarka iš viršaus į apačią, iš kairės į dešinę.

Vadovėlio struktūra. Temos uždaviniai

6. Apskaičiuokite aritmetinės progresijos (x_n) pirmųjų penkiasdešimties narių sumą S_{50} , kai:

- a) $x_n = 3n - 5$;
 b) $x_n = -7,2n + 13$;
 c) $x_n = \frac{8n-6}{3}$;
 d) $x_n = -\frac{5n+4}{2}$.

7. Apskaičiuokite sumą:

- a) visų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 200;
 b) visų lyginių natūraliųjų skaičių, ne didesnių už 130;
 c) visų natūraliųjų skaičiaus 5 kartotinių, ne didesnių už 250;
 d) visų natūraliųjų skaičiaus 7 kartotinių, ne didesnių už 120;
 e) visų triženklųjų skaičių, kuriuos dalijant iš 12 gaunama liekana 3;
 f) visų keturženklųjų skaičių, kuriuos dalijant iš 9 gaunama liekana 2.

8. a) Aritmetinės progresijos pirmasis narys $a_1 = 11$, o skirtumas $d = 4$. Apskaičiuokite jos narių nuo 12-ojo iki 30-ojo imtinai sumą.
 b) Aritmetinės progresijos pirmasis narys $a_1 = -10$, o skirtumas $d = 7$. Apskaičiuokite jos narių nuo 15-ojo iki 40-ojo imtinai sumą.

9. Apskaičiuokite aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų dvidešimties narių sumą, kai yra žinomi du progresijos nariai:

- a) $a_5 = -13$, $a_{13} = 17$;
 b) $a_4 = 42$, $a_{17} = -24$;
 c) $a_3 = 15,6$, $a_{12} = -11,4$;
 d) $a_4 = -8,6$, $a_{21} = 54,4$.

10. Apskaičiuokite aritmetinės progresijos (a_n) :

- a) S_{25} , jei $a_3 + a_7 = 22$, $a_5 + a_{10} = 47$;
 b) S_{20} , jei $a_{11} + a_{14} = 112$, $a_6 + a_{17} = 96$.

11. a) Sekos (x_n) pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = 11n - 3n^2$.

- 1) Apskaičiuokite pirmųjų aštuonių šios sekos narių sumą S_8 .
 2) Apskaičiuokite pirmąjį šios sekos narį x_1 .
 3) Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.
 4) Apskaičiuokite šios progresijos skirtumą d .

b) Sekos (x_n) pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = -2,5n^2 + 14,5n$.

- 1) Apskaičiuokite pirmųjų septynių šios sekos narių sumą S_7 .
 2) Apskaičiuokite pirmąjį šios sekos narį x_1 .
 3) Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.
 4) Apskaičiuokite šios progresijos skirtumą d .

12. Kiek narių turi baigtinė aritmetinė progresija (b_n) , kurios:

- a) $b_1 = 3$, $d = -8$, $S_n = -1460$;
 b) $b_1 = -7,2$, $d = 2,8$, $S_4 = 186$;
 c) $b_1 = 15$, $b_n = 135$, $S_n = 3075$;
 d) $b_1 = -75$, $b_n = 33$, $S_n = -273$?

13. Apskaičiuokite aritmetinės progresijos (b_n) pirmąjį narį b_1 , jei šios progresijos:

- a) $d = -13$, $S_{15} - S_{14} = 24$;
 b) $d = 2,5$, $S_{12} - S_{11} = 45$;
 c) $b_5 = 12$, $S_7 - S_4 = 18$;
 d) $b_3 = \frac{5}{9}$, $S_1 - S_7 = 2\frac{8}{9}$.

14. Seka apibrėžta formule $x_n = 3,2n - 12$, o paskutinis sekos narys lygus 36.

- 1) Kiek narių turi ši seka?
 2) Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.
 3) Apskaičiuokite progresijos pirmąjį narį ir skirtumą.
 4) Apskaičiuokite teigiamų narių, mažesnių už 20, sumą.

15. a) Aritmetinės progresijos (a_n) $d = -0,4$, $n = 12$, $a_n = 3,6$. Apskaičiuokite a_1 ir S_n .

- b) Aritmetinės progresijos (a_n) $a_1 = 35$, $d = 5$, $S_n = 750$. Apskaičiuokite n ir a_n .
 c) Aritmetinės progresijos (a_n) $d = 0,5$, $a_n = 50$, $S_n = 2525$. Apskaičiuokite a_1 ir n .
 d) Aritmetinės progresijos (a_n) $a_1 = 0,5$, $a_n = -29,5$, $d = -1,5$. Apskaičiuokite n ir S_n .

16. Apskaičiuokite sumas:

- a) $\sum_{n=1}^{15} (3n + 4)$;
 b) $\sum_{n=1}^{11} (18 - 7n)$.

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulės taikymas gyvenimiško turinio uždutyse

17. Toma skaito knygą, kurioje 795 puslapiai. Pirmą dieną ji perskaitė 25 puslapius, o kiekvieną kitą dieną perskaito 4 puslapius daugiau nei praėjusią dieną. Per kiek dienų Toma perskaitys visą knygą?

18. Sraigtasparnis atskraidino į alpinistų stovyklą siuntinį ir jį numetė. Iš kokio aukščio krito siuntinys, jei pirmą sekundę jis nukrito 4,5 m, o kiekvieną kitą sekundę – 9,8 m daugiau negu ankstesnę sekundę? Yra žinoma, kad siuntinys pasiekė žemę po 10 s.

19. Jono šeima sutapė 36 750 eurų elektromobiliui. Kiek mėnesių ji taupė, jei pirmasis mėnesinis įnašas buvo 500 eurų, o kiekvienas kitas – 50 eurų didesnis nei ankstesnį mėnesį?

Problemų sprendimas

22. Daugiakampio gretimų vidaus kampų dydžiai sudaro aritmetinę progresiją. Žinome, kad didžiausio kampo dydis yra 282° , o progresijos skirtumas lygus 24° . Kiek kraštinių turi šis daugiakampis? Remkitės patarimu.

PATARIMAS

Pasinaudokite iškiliojo daugiakampio kampų sumos formule $S = 180^\circ \cdot (n - 2)$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$; čia n – daugiakampio kampų skaičius.

23. Rutuliai sudėti trikampiu taip: pirmoje eilėje – 1 rutulys, antroje – 2 rutuliai, trečioje – 3 rutuliai ir t. t. Į kiek eilių sudėti 153 rutuliai? Kiek rutulių reikia trikampiui iš trisdešimties eilių sudėti?



20. Iš miestų A ir B vienas priešais kitą išvažiuo du dviratinkai. Pirmasis dviratinkas pirmą kelionės valandą važiuo 15 km/h greičiu, o kiekvieną kitą valandą greitį padidindavo 2 km/h. Antrasis dviratinkas pirmą valandą važiuo 28 km/h greičiu, o kiekvieną kitą valandą greitį sumažindavo 1 km/h. Abu dviratinkai susitiko po 7 valandų. Apskaičiuokite atstumą tarp miestų A ir B.

21. Ignas ir Laurynas nusprendė pagaminti 264 atminimo suvenyrus dvyliktojų išleistuvėms. Ignas pirmą dieną pagamino 6 suvenyrus, o kiekvieną kitą dieną – 2 suvenyrais daugiau nei praėjusią dieną. Laurynas pirmą dieną pagamino 3 suvenyrus, o kiekvieną kitą dieną – 1 suvenyru daugiau nei praėjusią dieną. Per kiek dienų Ignas ir Laurynas įvykdė planą, dirbdami kartu?

24. a) Aritmetinės progresijos 4-ojo ir 7-ojo narių suma lygi 26, o šių narių kvadratų suma lygi 410. Apskaičiuokite šios progresijos S_{10} .
 b) Duotos dvi aritmetinės progresijos: 1, 5, 9, ... ir 3, 8, 13, ... Apskaičiuokite pirmųjų dvidešimties bendrųjų šių progresijų narių sumą.

25. Išspręskite lygtis

- a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2x - 1) = 1600$;
 b) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 2352$;
 c) $\sqrt{7} + 4\sqrt{7} + 7\sqrt{7} + \dots + x = 287\sqrt{7}$;
 d) $\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + \dots + x = 400\sqrt{3}$;
 e) $(3x + 1) + (3x + 5) + (3x + 9) + \dots + (3x + 57) = 345$;
 f) $(2x - 1) + (2x - 7) + (2x - 13) + \dots + (2x - 67) = -480$.

26. Raskite natūralųjį skaičių, kuris yra 5 kartus mažesnis už prieš jį esančių natūraliųjų skaičių sumą.

27. Aritmetinė progresija turi 30 narių. Lyginėse vietose esančių narių suma lygi 945, o nelyginėse vietose – 870. Apskaičiuokite šios progresijos dvidešimtąjį narį ir skirtumą.

Daug daug uždavinių!

Kaip išmokai?
 Tikslingas klausimas kiekvienos temos pabaigoje nukreipia grįžti ir pasižiūrėti į sėkmės kriterijus (ką turi išmokti) ir parefleksuoti – ką jau moku, o ką dar verta pasimokyti.

◀ KAIP IŠMOKAI? (žr. p. 6)

Vadovėlio struktūra. Apibendrinimas



Apibendrinimas Progresijos

moks.lnk/bbz

Teorijos santrauka

- n*-tojo nario formulė** – tai formulė, išreiškianti sekos narį jo eilės numeriu *n* su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ (pvz., $x_n = 3n + 5$).
- Rekurentinė formulė** – tai formulė, išreiškianti sekos narį ankstesniu tos sekos nariu (ankstesniais nariais) (pvz., $x_n = 2x_{n-1}$, $x_1 = -5$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).
- Skaičių seką** yra funkcija, kurios argumentas yra natūralusis skaičius, o reikšmė – realusis skaičius.

Teorinė santrauka – visa esminė informacija glaustai ir vaizdžiai.

	Aritmetinė progresija	Geometrinė progresija
Apibrėžtis	Skaičių seka (a_n) vadinama aritmetine progresija, jei egzistuoja toks skaičius $d \in \mathbb{R}$, su kuriuo teisinga lygybė $a_{n+1} - a_n = d$, kai $n \in \mathbb{N}$.	Skaičių seka (b_n) vadinama geometrine progresija, jei egzistuoja toks skaičius $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, su kuriuo teisinga lygybė $b_{n+1} = b_n \cdot q$, kai $n \in \mathbb{N}$.
Pavyzdys (schema)	<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block;">Skirtumas d</div> $5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{+3} \dots$ <div style="border: 1px solid blue; padding: 2px; display: inline-block;">Pirmasis narys a_1</div>	<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block;">Vardiklis q</div> $5 \xrightarrow{\cdot 3} 15 \xrightarrow{\cdot 3} 45 \xrightarrow{\cdot 3} 135 \xrightarrow{\cdot 3} \dots$ <div style="border: 1px solid blue; padding: 2px; display: inline-block;">Pirmasis narys b_1</div>
Sąvokos ir žymenys	a_1 – pirmasis aritmetinės progresijos narys, a_n – <i>n</i> -tasis aritmetinės progresijos narys, $n \in \mathbb{N}$, d – aritmetinės progresijos skirtumas, S_n – pirmųjų <i>n</i> narių suma, $n \in \mathbb{N}$.	b_1 – pirmasis geometrinės progresijos narys, b_n – <i>n</i> -tasis geometrinės progresijos narys, $n \in \mathbb{N}$, q – geometrinės progresijos vardiklis, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, S_n – pirmųjų <i>n</i> narių suma, $n \in \mathbb{N}$.
<i>n</i>-tojo nario formulė	$a_n = a_1 + d(n - 1)$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$

	Aritmetinė progresija	Geometrinė progresija
Rekurentinė formulė	$a_{n+1} = a_n + d$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$	$b_{n+1} = q \cdot b_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$
Skirtumas <i>d</i> / vardiklis <i>q</i>	$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$	$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$
Savybės	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $a_n = \frac{a_{-k} + a_{k+1}}{2}$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, kiekvienu $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $n > k$	$ b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $ b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, kiekvienu $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $n > k$
Pirmųjų <i>n</i> narių sumos formulės	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$	$S_n = \frac{b_1 - q b_n}{1 - q}$, $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$, $q \neq 0$
Išskirtys		Nykstamoji geometrinė progresija – geometrinė progresija, kurios vardiklis yra mažesnis už 1 ir nelygus nuliui ($ q < 1$, $q \neq 0$). Jos visų narių suma $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

• Bet kokios sekos *n*-tasis narys, išreikštas sumomis: $x_n = S_n - S_{n-1}$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
 Kitas sumos žymėjimo būdas: $S_n = \sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.



Vadovėlio struktūra. Apibendrinimas

Pasitikriname dalies uždaviniai skirti patikrinti, kaip pavyko išmokyti ciklo temas. Jei sprendžiant uždavinius prireiks pagalbos – šalia rekomendacijos ką ir kur gali pasižiūrėti, patikrinti. Ši dalis skirta – mokymuisi mokytis.

Pasitikriname

Kiekvienas iš 1–4 uždavinių turi tik vieną teisingą atsakymą. Pasirinkite jį.

1. Sekos n -tojo nario formulė yra $a_n = (-1)^n + n$, $n \in N$. Kam lygūs pirmieji trys šios sekos nariai?
 A 0, 3, 2 B 0, 1, 2
 C 0, 4, 6 D 2, 3, 4

2. Kurie trys skaičiai yra iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai?
 A 1, 3, 9 B 1, 4, 9
 C 0,5, 1, 1,5 D -1, 2, -4

3. Kurie trys skaičiai nėra iš eilės einantys kokios nors geometrinės progresijos nariai?
 A 10^{2n} , 10^{2n} , 10^{2n} B $\lg 10$, $\lg 100$, $\lg 10000$
 C $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{27}$ D 4, 9, 16

4. Sekos (c_n) pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = n^2$, $n \in N$. Kokia yra šios sekos n -tojo nario formulė?
 A $c_n = n^2$ B $c_n = 2n + 1$
 C $c_n = 2n - 1$ D $c_n = 1$

5. Užrašykite begalinį periodinį dešimtainį skaičių trupmena:
 a) 0,(2); b) 0,(36); c) 2,5(3).

6. Apskaičiuokite sumas:
 a) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$;
 b) $5 + 2 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} + \dots$

7. Su kokiais x reikšmėmis skaičiai $10x - 15$, $x + 30$, x sudaro geometrinę progresiją?

8. Nurodykite sekos (u_n) , kurios n -tojo nario formulė yra $u_n = -n^2 + 8,5n - 4$, $n \in N$, teigiamų narių skaičių.

9. Aritmetinės progresijos (a_n) pirmasis ir antrasis nariai yra atitinkamai lygūs 17 ir 13. Kelintas šios progresijos narys yra skaičius -67 ?

10. Sekos n -tojo nario formulė yra $a_n = 0,3n - 10$, $n \in N$.
 1) Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.
 2) Apskaičiuokite pirmąjį narį a_1 ir skirtumą d .
 3) Kiek ši seka turi neigiamų narių?
 4) Parašykite šios sekos pirmųjų n narių sumos formulę.

11. Geometrinės progresijos (b_n) antrasis narys $b_2 = -\sqrt{7}$, o trečiasis narys $b_3 = 49$.
 1) Apskaičiuokite b_1 ir q .
 2) Parašykite rekurentinę šios sekos formulę.
 3) Apskaičiuokite pirmųjų dešimties sekos narių sumą.

12. Į banką, kuris moka 3,5 % sudėtinių metinių palūkanų, Paulius ketveriems metams padėjo 1000 eurų. Kiek pinigų bus Pauliaus sąskaitoje po 4 metų?

13. Iškloti kiemą trinkelėmis trunka 17 darbo dienų. Užsakovas Augustas siūlo darbininkams pirmą darbo dieną mokėti 1 centą, o kiekvieną tolesnę dieną uždarbį dvigubinti. Užsakovas Majus siūlo pirmą darbo dieną mokėti 30 eurų, o kiekvieną tolesnę dieną uždarbį didinti 5 eurai. Kurio užsakovo pasiūlymas darbininkams yra pelningesnis? Atsakymą pagrįskite.

14. Jei S_n yra aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų n narių suma ir n – nelyginis natūralusis skaičius, tai $S_n = na_n$. Įrodykite.

15. Skaičių a , b , c , sudaranti aritmetinę progresiją, suma lygi 270. Jei prie pirmojo progresijos nario pridėsime 35, o iš paskutinio atimsime 20, tai gauti trys skaičiai sudarys geometrinę progresiją. Apskaičiuokite a , b , c reikšmes.

Jei netelsingai išsprendėte	Rekomenduojame
1, 8, 11, 2	Pakartokite skaičių sekų reišikimo būdus (tema „Skaičių seka“).
2, 10, 1	Prisiminkite, kokia seka vadinama aritmetine progresija (temos „Aritmetinė progresija“ 5 pavyzdys).
3, 7	Išnagrinėkite temos „Geometrinė progresija“ 1 pavyzdį.
4	Prisiminkite, kaip, žinant sekos pirmųjų n narių sumos formulę, gauti n -tojo nario formulę (temos „Geometrinės progresijos pirmųjų n narių suma“ 3 pavyzdys).
5	Išnagrinėkite temos „Nykstamoji geometrinė progresija“ 3 pavyzdį.
6a, 11, 3	Pakartokite, kaip taikoma geometrinės progresijos n narių sumos formulė $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ (temos „Geometrinės progresijos pirmųjų n narių suma“ 1 pavyzdys).
6b	Pakartokite nykstamosios geometrinės progresijos visų narių sumos formulę $S = \frac{b_1}{1 - q}$ (temos „Nykstamoji geometrinė progresija“ 1 pavyzdys).
7	Išnagrinėkite, kaip pritaikyti savybę $b_2^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (temos „Geometrinės progresijos savybės“ 1 pavyzdys).
9	Išnagrinėkite temos „Aritmetinė progresija“ 4 pavyzdį.
10, 2, 10, 3	Išnagrinėkite temos „Aritmetinė progresija“ potemę „Kaip išreiškiama aritmetinė progresija“.
10, 4	Prisiminkite aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formules (tema „Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma“). Į vieną iš jų įrašykite a_1 ir d reikšmes (arba a_n , išrašykite ir gautą reišikinį supaprastinkite).
11, 1	Išnagrinėkite temos „Geometrinė progresija“ potemę „Kaip išreiškiama geometrinė progresija“.
12	Išnagrinėkite temos „Geometrinė progresija“ 6 pavyzdį.
13	Prisiminkite, kaip taikyti aritmetinės ir geometrinės progresijų pirmųjų n narių sumos formules, sprendžiant gyvenimiško turinio uždavinius (temos „Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma“ ir „Geometrinės progresijos pirmųjų n narių suma“). Išspręskite šį uždavinį dar kartą.
14	Panagrinėkite temą „Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma“. Daugiau pagalbos
15	Išnagrinėkite temos „Geometrinės progresijos savybės“ 4 pavyzdį.

Serijos „Horizontalai“ vadovėlių komplektų vertės

➤ **Atitinka atnaujintų bendrųjų programų reikalavimus:**

- nuoseklus kompetencijų ugdymui skirtas mokymo(si) turinys pagal amžiaus tarpsnį;
- aktualūs kontekstai;
- galimybės kartu su mokiniais analizuoti mokymą(si) ir priimti sprendimus.

➤ **Atliepia skirtingus mokinių poreikius:**

- patrauklus šiuolaikinis dizainas, daugiau vaizdumo;
- daug skirtingų tipų ir sudėtingumo užduočių su pagalba, patarimais, instrukcijomis, pavyzdžiais;
- mokymo(si) etapais išdėstoma tema (*nuo pasirengimo mokytis, žinių ir supratimo kaupimo, taikymo iki įtvirtinimo ir refleksijos*) atsižvelgiant į šiuolaikinio mokinio skaitymo įpročius ir įprastą mokymo(si) strategiją;
- atskleidžiama mokymosi prasmė.
- praturtinta skaitmeniniais ištekliais.

➤ **Ugdo besimokantįjį:**

- atkreipiamas dėmesys į gyvenime svarbiausių įgūdžių ugdymą;
- problemomis, projektais grįsto ugdymo(si) veiklos;

➤ **Taupo laiką:**

- atsakingai parengti turiningi mokymo(si) įrankiai;
- pateikiami užduočių atsakymai;
- rekomenduojama, kaip dirbti su komplektu.

Serijos „Horizontai“ pratybų vertės (5, 6, 7, 8 klasės)

➤ **Užduotys kiekvienai vadovėlio temai:**

praktinės užduotys, susijusios su vadovėlio teorine medžiaga, padeda įtvirtinti žinias ir moko jas taikyti praktiškai, formuoti, lavinti reikalingus įgūdžius, siekti aukštesnių mokymosi rezultatų.

➤ **Užduotys skirtingo sudėtingumo:**

kiekvienai temai skiriami 4 skirtingo sudėtingumo lygio užduočių blokai (nuo žinių, supratimo iki AMG).

➤ **Pasitikrinimo testas kiekvieno ciklo pabaigoje:**

skirtingo sudėtingumo užduotys padeda pasitikrinti, įsivertinti ciklo žinias, gebėjimus.

➤ **Mokytojui pateikiami testų ir visų pratybų užduočių atsakymai.**

Kaip dirbti su serijos „Horizontalai“ matematikos vadovėliais:

1. Matematikos 5 klasės vadovėlio komplekto autorės Laimos Daukšytės-Koncevičienės pristatymas - <https://www.sviesa.lt/renginiai/37/>
2. Matematikos 9 klasės vadovėlio komplekto sudarytojos ir autorės Jūratės Gedminienės pristatymas - <https://www.sviesa.lt/renginiai/43/>

Tamo grupė

Leidinių užsakymas, klausimai tel. +370 614 22022 arba el.paštu prekyba@sviesa.lt.

Leidinių užsakymas registruotiems vartotojams www.uzsakymas.lt

Dėl registracijos kreipkitės +370 614 22022 arba informacija@sviesa.lt